

Ισχύουν τα παρακάτω:

$$① \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}$$

$$② (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a}$$

$$③ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

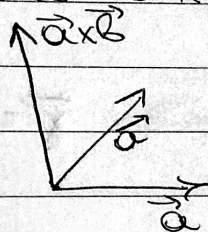
Απόδειξη:

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c} - (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{b}) \vec{a} - (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = \vec{0}$$

Παρατήρηση:

Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Δείχουμε το πόσο $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$ ή < 0 (με το αν το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ δείχνει προς ή αντίστροφο) $\downarrow$ 200
 δείχνει προς ή αντίστροφο

Πομπή: Στο δείχνει προς εσωτ. αναφοράς το $\vec{c}$ είναι παράλληλο με το $\vec{a} \times \vec{b}$.



$$|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| < 0, |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Ασκίσεις:

$$① \text{ vdo } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \text{ εφόσον } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} - (\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} \\ \Rightarrow (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} \Rightarrow -(\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \\ (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Προβ: όταν είναι αλληλοκάτι 2 διανύσματα π.χ. $\vec{a}, \vec{c}$, τότε $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$.

από αυτό

② Έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ γνωστά διανύσματα. Να βρεθεί το $\vec{x}$:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \times \vec{x}, \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \text{ και } \vec{x} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\text{και } \vec{a} \parallel \vec{c} \xrightarrow{\text{vdo}} \vec{x} \text{ κάθετο στο } \vec{c}$$

Λύση:

$$\text{πολλώτερο με } \vec{x} \times \vec{c} \text{ (εξωτερικό)}, \text{ οπότε } \vec{a} \times \vec{c} = (\vec{b} + \vec{c} \times \vec{x}) \times \vec{c} \Rightarrow$$



$\vec{0} = \vec{b} \times \vec{x} + (\vec{x} \times \vec{x}) \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{0} = \vec{b} \times \vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{x}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{x}) \vec{x}$
 $\Rightarrow \vec{x} = -\frac{\vec{b} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} + \frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \vec{x} \times \vec{b}$

③ (Βαθμ.) Δίνονται τα $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$.

Να υπολογιστεί $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \times \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$

$= [(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{b}) \vec{a}] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (-\vec{b} - 3\vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{k}$
 $= (-\vec{b} - 3\vec{a}) \cdot (-2\vec{k}) = (-\vec{b} - 3\vec{a}) \cdot (-2\vec{k}) = \dots$

9ος τρόπος:

$= ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \cdot \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$
 $= -\|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}\|^2 \quad (\text{από πρόβλημα})$

④ (δεν είναι στο φυτ.)

Δίνονται τα $\vec{a} = (1, 1, -1)$ και $\vec{b} = (1, -1, 1)$. Να βρεθεί $\vec{x} =$

i) τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ έχουν ίδιο μέτρο.

ii) -||- να σχηματίζουν ανά 2 ίσες γωνίες και

iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}\}$ ανεξάρτητα αλληλοκάθετα διανύσματα.

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. $\|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$.

Από i) $\Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{3} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ ③

ii) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{b}, \vec{x}) = \cos(\vec{a}, \vec{x})$ και $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{x}\| \Rightarrow$

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}$ $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = -1$ και $\vec{b} \cdot \vec{x} = -1$

$x_1 + x_2 - x_3 = -1$ και $x_1 - x_2 + x_3 = -1$.

$x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = -1$



H (3), λόγω (1), (2) δίνει $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Άρα, τα τριανιά διανύσματα είναι: $\vec{a} = (-1, 1, 1)$
 $\vec{b} = (-1, -1, -1)$

και λόγω της (iii) $\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \rightarrow & 1 & 1 & -1 \\ \vec{b} \rightarrow & 1 & -1 & 1 \\ \vec{c} \rightarrow & & & \end{vmatrix} > 0$$

(5) Δίνεται τα παραπάνω διαν. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, τα οποία ανά 2 σχηματίζουν ίσες γωνίες (ϕ). Για τρεις τέτοιες τις γωνίες ϕ , τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \phi$$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \cdot \|\vec{a}\|^2 + \mu (\vec{b} \cdot \vec{a}) + \nu (\vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda + \mu \cos \phi + \nu \cos \phi = 0} \quad (1)$$

και $(\vec{b}) \quad \boxed{\lambda \cos \phi + \mu + \nu \cos \phi = 0} \quad (2)$

και $(\vec{c}) \quad \boxed{\lambda \cos \phi + \mu \cos \phi + \nu = 0} \quad (3)$

(Σ) με (1), (2), (3) αφορές ως προς λ, μ, ν .

Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Γ.Ε. $\Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0 \Leftrightarrow$ το (Σ) έχει μόνο τη φανερά λύση $\Leftrightarrow$

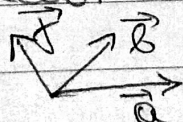
$$\det S \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \cos \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & 1 & \cos \phi \\ \cos \phi & \cos \phi & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \Gamma.Ε. \Leftrightarrow \det = 0 \text{ (εξίσωση ως προς } \phi)$$

αφού μονόπαραγ.

$$\begin{vmatrix} 1+2\cos \phi & 1+2\cos \phi & 1+2\cos \phi \\ \cos \phi & 1 & \cos \phi \\ \cos \phi & \cos \phi & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1+2\cos \phi & 1+2\cos \phi & 1+2\cos \phi \\ 0 & 1-\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\cos \phi \end{vmatrix}$$

Γεωμετρικά κομμάτια δεικ.

Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Γ.Ε. $\Leftrightarrow$ βρίσκονται $(1+2\cos \phi)(1-\cos \phi)^2$ στο ίδιο επίπεδο.



$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

